# Os Quaterniões de Hamilton

## Introdução à Álgebra Geométrica

Prof. Carlos R. Paiva

## Quaterniões

Hamilton inventou os quaterniões em 1843. Esta invenção culminou uma pesquisa que pretendia introduzir um produto em $\mathbb{R}^3$ que fosse semelhante ao produto em $\mathbb{C}$ entre números complexos. Note-se, porém, que o formalismo algébrico habitualmente usado hoje em dia é um resultado da reformulação de Gibbs (1901) a partir dos quaterniões de Hamilton.

Uma das ideias de Hamilton era a introdução de um sistema de números hipercomplexos que generalizasse $\mathbb{C}$ para três dimensões. Assim, em vez de se considerar apenas um número complexo $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$, a ideia era tentar encontrar um sistema algébrico no qual os números hipercomplexos da forma $t = w + i\,x + j\,y$ fizessem sentido. Naturalmente que, tal como $i^2 = -1$, deveria agora considerar-se que, também, a nova unidade imaginária $j$ seria tal que $j^2 = -1$, tendo-se ainda $w, x, y \in \mathbb{R}$. Ao número hipercomplexo $t = w + i\,x + j\,y$ deveria corresponder um «comprimento» $|t|$ tal que

$$|t|^2 = w^2 + x^2 + y^2$$

tendo-se, para este efeito,

$$\begin{aligned} |t|^2 &= t\bar{t} = (w + i\,x + j\,y)(w - i\,x - j\,y) \\ &= w^2 + x^2 + y^2 - xy\,(ij + ji) \end{aligned}$$

onde se introduziu o conjugado $\bar{t} = w - ix - jy$. Mas então deveria ter-se

$$ij + ji = 0 \quad \Rightarrow \quad ji = -ij\,.$$

Porém, isso levantava um outro problema: o que seria, exactamente, $k = ij$? Admitindo a associatividade, viria então

$$k^2 = (ij)^2 = (ij)(ij) = -(ij)(ji) = -i\,(jj)\,i = -j^2\,(ii) = ii = i^2 = -1.$$

Para que o novo sistema algébrico fosse fechado, seria ainda necessário que, também este produto, tivesse a forma $k = ij = \alpha + i\,\beta + j\,\gamma$. Mas então, por um lado, deveria ter-se

$$i\,(ij) = (ii)\,j = i^2\,j = -j\,.$$

Por outro lado, deveria também ser

$$i\,(ij) = i\,(\alpha + \beta\,i + \gamma\,j) = \alpha\,i + \beta\,i^2 + \gamma\,(ij) = (\alpha\,\gamma - \beta) + (\alpha + \beta\,\gamma)\,i + \gamma^2\,j\,.$$

Assim, chega-se a uma contradição:

$$i\,(ij) = -j \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = -1.$$

Com efeito, este resultado era impossível porque, como $\gamma \in \mathbb{R}$, deveria necessariamente observar-se $\gamma^2 \geq 0$ e nunca $\gamma^2 = -1$.

Uma outra possibilidade investigada por Hamilton era a dos números $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ e $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$, em que $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ (com $i \in \{1, 2, 3\}$) tendo-se $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Comecemos por notar que, neste caso, se tem $|a|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ desde que

$$\begin{aligned} |a|^2 &= a\,\bar{a} = -(a_1 i + a_2 j + a_3 k)(a_1 i + a_2 j + a_3 k) \\ &= -\left(a_1^2 i^2 + a_2^2 j^2 + a_3^2 k^2\right) - a_1 a_2 (ij + ji) - a_1 a_3 (ik + ki) - a_2 a_3 (jk + kj) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \end{aligned}$$

o que era, com efeito, compatível com $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, impondo que

$$\begin{cases} ij + ji = 0 \\ ik + ki = 0 \\ jk + kj = 0 \end{cases}$$

o que implicava, portanto, a não comutatividade do produto (no caso geral). À semelhança dos números complexos, considera-se o conjugado de $a$ como sendo o número $\bar{a}$. Assim também, viria $|b|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$ e

$$\begin{aligned} ab &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_1 i + b_2 j + b_3 k) \\ &= -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, ij + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, jk + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, ki \end{aligned}$$

que teria a forma

$$ab = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ desde que se considerasse que

$$\begin{cases} ij = k \\ jk = i \\ ki = j \end{cases}$$

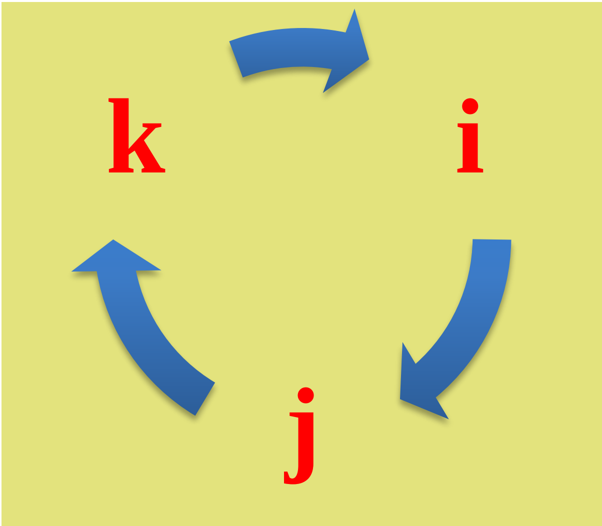
o que se poderia sintetizar na tabuada que a seguir se apresenta.

| | $i$ | $j$ | $k$ |
|---|---|---|---|
| $i$ | $-1$ | $k$ | $-j$ |
| $j$ | $-k$ | $-1$ | $i$ |
| $k$ | $j$ | $-i$ | $-1$ |

Porém, este sistema algébrico tinha um defeito essencial: o produto $ab$ não era da mesma forma que os números hipercomplexos $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ e $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ (i.e., por outras palavras, o sistema algébrico não era fechado). Hamilton entendeu, por fim, que a solução era ligeiramente diferente: teria que considerar números da forma

$$q = w + ix + jy + kz,$$

a que chamaria *quaterniões* e adoptando a tabuada anterior (que se representa, de forma simbólica, no diagrama seguinte).




Note-se que estas relações podem ser sintetizadas da seguinte forma:

$$\boxed{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1}.$$

Foi ainda Hamilton que cunhou o termo «vector». Para ele um vector seria a parte imaginária de um quaternião (rigorosamente, como se verá no estudo da álgebra geométrica, é mais apropriado considerar que a parte imaginária de um quaternião corresponde a um bivector). Com efeito, tem-se

$$q = \Re(q) + \Im(q), \quad \Re(q) = w, \quad \Im(q) = ix + jy + kz.$$

Porém, enquanto que o anel $\mathbb{C}$ é um corpo, o anel dos quaterniões – que se designa pelo símbolo $\mathbb{H}$ em homenagem a Hamilton – não é um corpo: a operação de multiplicação não é comutativa (chama-se corpo a um anel de divisão abeliano). Assim, $\mathbb{H}$ é apenas um anel de divisão: é, com efeito, um anel unitário (o 1 é, de facto, o elemento neutro da multiplicação) em que todos os elementos não nulos são invertíveis ou, simbolicamente, $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Hamilton chamou precisamente *vector* à parte imaginária de um quaternião:

$$\mathbf{q} = \Im(q) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3.$$

Nesta interpretação as unidades imaginárias são, também, vectores (mais precisamente, vectores unitários). Ainda hoje se encontram trabalhos científicos e pedagógicos que designam os vectores unitários das três direcções do espaço desta forma: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$. Note-se que o conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ constitui uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. É portanto possível a escrita alternativa

$$q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}, \quad q_0 = \Re(q) \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{q} = \Im(q) \in \mathbb{R}^3$$

ou seja

$$\mathbb{H} = \Re(\mathbb{H}) \oplus \Im(\mathbb{H}), \quad \Re(\mathbb{H}) = \mathbb{R}, \quad \Im(\mathbb{H}) = \mathbb{R}\,\mathbf{i} + \mathbb{R}\,\mathbf{j} + \mathbb{R}\,\mathbf{k} = \mathbb{R}^3,$$

de forma que se infere que

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{B}(\mathbb{H}) = \{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}, \quad \dim(\mathbb{H}) = 4.$$

Um quaternião $q \in \mathbb{H}$ diz-se um quaternião puro quando $q = \mathbf{q} = \Im(q)$, i.e., desde que $q_0 = \Re(q) = 0$. Define-se o conjugado de $q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}$ como sendo o quaternião $\bar{q} = q_0 - \mathbf{q} \in \mathbb{H}$. O módulo de $q \in \mathbb{H}$ é então o número real $|q|$ tal que

$$|q|^2 = q\,\bar{q} = (q_0 + \mathbf{q})(q_0 - \mathbf{q}) = q_0^2 - q_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{q} - \mathbf{q}^2 = q_0^2 - \mathbf{q}^2 = q_0^2 + |\mathbf{q}|^2 \geq 0$$

e onde

$$\mathbf{q} = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \quad \rightarrow \quad \left|\begin{aligned} \mathbf{q}^2 &= (q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k})(q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ &= -(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + q_1 q_2 (\mathbf{ij} + \mathbf{ji}) + q_1 q_3 (\mathbf{ik} + \mathbf{ki}) + q_2 q_3 (\mathbf{jk} + \mathbf{kj}) \\ &= -(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \end{aligned}\right.$$

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}, \quad \mathbf{q}^2 = -|\mathbf{q}|^2.$$

Note-se que se tem

$$q + \bar{q} = 2\,\Re(q), \quad q - \bar{q} = 2\,\Im(q).$$

O inverso de $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ é então dado por (com $q \neq 0$)

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{q\,\bar{q}} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} = \frac{q_0 - \mathbf{q}}{q_0^2 + |\mathbf{q}|^2} = \frac{q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

tendo-se, com efeito,

$$q\,q^{-1} = q^{-1}q = 1.$$

Todo o quaternião $q \in \mathbb{H}$ satisfaz a seguinte equação quadrática de coeficientes reais:

$$\boxed{q^2 - 2\,\Re(q)\,q + |q|^2 = 0}.$$

Com efeito, tem-se

$$\begin{cases} q^2 = \left[\Re(q)\right]^2 + \left[\Im(q)\right]^2 + 2\,\Re(q)\,\Im(q) \\ |q|^2 = \left[\Re(q)\right]^2 - \left[\Im(q)\right]^2 \\ q\,\Re(q) = \left[\Re(q)\right]^2 + \Re(q)\,\Im(q) \end{cases}$$

como se pode facilmente verificar. Note-se, de passagem, que se $z \in \mathbb{C}$ então também

$$z^2 - 2\,\Re(z)\,z + |z|^2 = 0\,.$$

O produto de dois quaterniões $p, q \in \mathbb{H}$ tais que

$$\begin{cases} p = p_0 + \mathbf{p} = p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\,\mathbf{j} + p_3\mathbf{k} \\ q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\,\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \end{cases}$$

é então o quaternião $p\,q \in \mathbb{H}$ tal que

$$\begin{aligned} p\,q &= \left(p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\,\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}\right)\left(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\,\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}\right) \\ &= p_0 q_0 - \left(p_1 q_1 + p_1 q_2 + p_3 q_3\right) + p_0\left(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\,\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}\right) + q_0\left(p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\,\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}\right) \\ &\quad + \left(p_2 q_3 - p_3 q_2\right)\mathbf{i} + \left(p_3 q_1 - p_1 q_3\right)\mathbf{j} + \left(p_1 q_2 - p_2 q_1\right)\mathbf{k}\,. \end{aligned}$$

Note-se, de passagem, que

$$p\,q \quad \mapsto \quad \Re(p\,q) = p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3$$

é a forma bilinear (ou produto interno) correspondente à métrica de Lorentz da relatividade restrita. Em 1901 Gibbs publicou a definição de produto externo entre dois vectores $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ como sendo o vector

$$\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = \left(p_2 q_3 - p_3 q_2\right)\mathbf{i} + \left(p_3 q_1 - p_1 q_3\right)\mathbf{j} + \left(p_1 q_2 - p_2 q_1\right)\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3\,.$$

Notando, ainda, que o produto interno dos vectores $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ é

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 \in \mathbb{R}$$

infere-se que o produto $p\,q \in \mathbb{H}$ se escreve na forma mais condensada

$$p\,q = p_0 q_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p}\times\mathbf{q}\,, \quad \Re(p\,q) = p_0 q_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\,, \quad \Im(p\,q) = p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p}\times\mathbf{q}\,.$$

Note-se, em particular, que a conjugação é tecnicamente um anti-automorfismo, i.e., tem-se

$$\overline{p\,q} = \Re(p\,q) - \Im(p\,q) = p_0 q_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} - p_0\mathbf{q} - q_0\mathbf{p} - \mathbf{p}\times\mathbf{q} = \left(q_0 - \mathbf{q}\right)\left(p_0 - \mathbf{p}\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{\overline{p\,q} = \bar{q}\,\bar{p}}\,.$$

Em geral introduz-se um produto interno em $\mathbb{H}$ através da seguinte forma bilinear:

$$\langle p, q \rangle = p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3\,.$$

Este produto interno é consistente com a anterior definição do comprimento $|q|$ de um quaternião:

$$|q|^2 = \langle q, q \rangle = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = q_0^2 + |\mathbf{q}|^2 .$$

Confirma-se, assim, que a base $\mathcal{B}(\mathbb{H}) = \{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ é ortonormada e corresponde à base canónica de $\mathbb{R}^4$: $1 = (1,0,0,0)$; $\mathbf{i} = (0,1,0,0)$; $\mathbf{j} = (0,0,1,0)$; $\mathbf{k} = (0,0,0,1)$. Podemos, ainda, definir este produto interno $\langle p, q \rangle$ de forma independente de quaisquer coordenadas:

$$|q|^2 = q\,\overline{q} = \overline{q}\,q = \langle q, q \rangle .$$

Com efeito, fazendo na última definição $q \mapsto p + q$, obtém-se

$$\left| \begin{array}{l} \langle p+q,\, p+q \rangle = \langle p,\, p \rangle + 2\,\langle p,\, q \rangle + \langle q,\, q \rangle \\ \langle p+q,\, p+q \rangle = (p+q)\left(\overline{p+q}\right) = p\,\overline{p} + p\,\overline{q} + q\,\overline{p} + q\,\overline{q} \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \boxed{\langle p, q \rangle = \frac{1}{2}\left(p\,\overline{q} + q\,\overline{p}\right)} .$$

Nestas condições, conclui-se o seguinte critério de ortogonalidade entre quaterniões: dois quaterniões são ortogonais desde que $\langle p, q \rangle = 0$, i.e., quando $p\,\overline{q} = -\,q\,\overline{p}$, ou ainda,

$$\boxed{\langle p, q \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p\,\overline{q} \in \Im(\mathbb{H})} .$$

Uma propriedade fundamental dos quaterniões é a seguinte:

$$p, q \in \mathbb{H} \quad \rightarrow \quad \boxed{|p\,q| = |p|\,|q|} .$$

A demonstração é relativamente simples:

$$|p\,q|^2 = \langle p\,q,\, p\,q \rangle = \left(\overline{p\,q}\right)(p\,q) = \overline{q}\,(\overline{p}\,p)\,q = \langle p,\, p \rangle\,\overline{q}\,q = \langle p,\, p \rangle \langle q,\, q \rangle = |p|^2\,|q|^2 .$$

Facilmente se verificam as duas seguintes propriedades do produto externo

$$\left| \begin{array}{ll} \text{ortogonalidade} & \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = 0, \quad \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = 0 \\ \text{teorema de Pitágoras} & |\mathbf{p} \times \mathbf{q}|^2 = |\mathbf{p}|^2\,|\mathbf{q}|^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 \end{array} \right.$$

e ainda que o produto de dois quaterniões puros é dado por

$$\mathbf{p\,q} = -\,\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}, \quad \Re(\mathbf{p\,q}) = -\,\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, \quad \Im(\mathbf{p\,q}) = \mathbf{p} \times \mathbf{q} .$$

Os críticos dos quaterniões (e, em particular, Gibbs) apontaram o seguinte problema: o produto de dois quaterniões puros não é um quaternião puro, i.e., o produto de dois «vectores» não é um «vector» já que a parte real não é nula. Todos (incluindo Gibbs e o próprio Hamilton) não entenderam o seguinte: na realidade um quaternião puro não é um vector mas sim um bivector. Os físicos dizem por vezes que o resultado do produto externo de dois vectores «polares» é um vector «axial». Na verdade, o produto externo de dois vectores é facilmente substituível pelo produto exterior (de Grassmann) e o resultado do produto exterior de dois vectores é um bivector: o papel dos «vectores axiais» é desempenhado, como se vê, por bivectores. Existe, porém, um facto matemático que demonstra a «inferioridade» do produto externo de Gibbs:

$$|\mathbf{p}\times\mathbf{q}| = |\mathbf{p}|\,|\mathbf{q}|\sin\theta \le |\mathbf{p}|\,|\mathbf{q}|, \quad \theta = \sphericalangle(\mathbf{p},\mathbf{q}).$$

Assim, o produto externo não é invertível: não é possível recuperar $\mathbf{p}$ ou $\mathbf{q}$ a partir de $\mathbf{p}\times\mathbf{q}$. No entanto, o produto de dois quaterniões já é invertível pois $|\mathbf{p}\,\mathbf{q}| = |\mathbf{p}|\,|\mathbf{q}|$, tendo-se em particular

$$u = \mathbf{p}\,\mathbf{q} = -\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{p}\times\mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{p} = u\,\mathbf{q}^{-1} \\ \mathbf{q} = \mathbf{p}^{-1}u \end{array} \right.$$

em que, e.g.,

$$\mathbf{p}^{-1} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2} = -\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|^2} = \frac{\overline{\mathbf{p}}}{\mathbf{p}\,\overline{\mathbf{p}}}.$$

Tem-se ainda

$$u = \mathbf{p}\,\mathbf{q} \quad \to \quad u^{-1} = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{p}^{-1}$$

de forma a que $u\,u^{-1} = u^{-1}u = 1$.

O produto externo não é associativo enquanto que o produto de quaterniões é associativo:

$$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \quad \to \quad \left| \begin{array}{ll} \text{álgebra dos quaterniões} & \mathbf{a}(\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\,\mathbf{b})\,\mathbf{c} \\ \text{álgebra do produto externo} & \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} \end{array} \right. .$$

Com efeito, a álgebra dos quaterniões é uma álgebra de Clifford (e, portanto, associativa) pois $\mathbb{H} \simeq C\ell_3^+ = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$. Porém, a álgebra do produto externo (i.e., a álgebra vectorial de Gibbs) é uma álgebra de Lie:

$$\left| \begin{array}{ll} \text{anti-simetria} & \mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\,\mathbf{b}\times\mathbf{a} \\ \text{identidade de Jacobi} & \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0 \end{array} \right. .$$

A identidade de Jacobi pode ser facilmente demonstrada usando a conhecida regra do produto externo (a identidade de Grassmann)

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}.$$

Notemos, em primeiro lugar, que

$$\mathbf{a},\mathbf{b}\in\Im(\mathbb{H}) \quad \rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{ab}=-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{b} \\ \mathbf{ba}=-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathbf{b} \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-\dfrac{1}{2}(\mathbf{ab}+\mathbf{ba}) \\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}=\dfrac{1}{2}(\mathbf{ab}-\mathbf{ba}) \end{array} \right. .$$

Além disso, vem

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{a}(\mathbf{bc})=-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}+\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \\ (\mathbf{bc})\mathbf{a}=-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{a} \end{array} \right.$$

donde se infere que

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})-(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{a}=\mathbf{abc}-\mathbf{bca}.$$

Mas, por outro lado, tem-se

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\frac{1}{2}\left[\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})-(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{a}\right].$$

Logo, obtém-se a seguinte regra:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\frac{1}{2}(\mathbf{abc}-\mathbf{bca}).$$

Atendendo, agora, a que

$$\mathbf{abc}-\mathbf{bca}=(\mathbf{ab}+\mathbf{ba})\mathbf{c}-\mathbf{b}(\mathbf{ac}+\mathbf{ca})=2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}-2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}$$

tira-se, finalmente, a identidade de Grassmann (já anteriormente apresentada):

$$\boxed{\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}}.$$

Assim, deduz-se facilmente a identidade de Jacobi:

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} \\ \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a} \\ \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0}.$$

Da identidade de Jacobi vem ainda

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})-(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$$

que estabelece a não-associatividade do produto externo pois $\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=0$ apenas (casos não triviais: em que nenhum vector é nulo) quando $\mathbf{a}\,||\,\mathbf{c}$ ou $\mathbf{b}\,||\,(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$.

Note-se que se tem (processo de construção de Cayley-Dickson)

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{C}=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\,i \\ \mathbb{H}=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,j \end{array}}$$

como se pode imediatamente verificar

$$\left| \begin{array}{l} x, y \in \mathbb{R} \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left| \begin{array}{ll} z \in \mathbb{C} & z = x + iy \\ q \in \mathbb{H} & q = z_1 + z_2 j = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) j = x_1 + iy_1 + jx_2 + ky_2 \end{array} \right. .$$

Em geral, se se tiver $\mathbf{a} = \alpha\,\hat{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^3$, com $\alpha = |\mathbf{a}|$ e

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\alpha} \quad \rightarrow \quad \hat{\mathbf{a}}^2 = -|\hat{\mathbf{a}}|^2 = -1,$$

é possível escrever

$$a = a_0 + \mathbf{a}_0 \in \mathbb{H}, \quad |a|^2 = a_0^2 + \alpha_0^2 = 1, \quad \alpha_0 = |\mathbf{a}_0| = \sqrt{1 - a_0^2} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad a_0 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

de modo que

$$a = \exp\left(\frac{\mathbf{a}}{2}\right) = \exp\left(\frac{\alpha}{2}\hat{\mathbf{a}}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \hat{\mathbf{a}}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = a_0 + \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{a}_0 = \hat{\mathbf{a}}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\mathbf{a}}{\alpha}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Infere-se, portanto, que

$$a = \exp\left(\frac{\alpha}{2}\hat{\mathbf{a}}\right)$$

é uma parametrização $\mathbf{a}$ da esfera-3, $\mathbb{S}^3$, dos quaterniões unitários

$$\boxed{\mathbb{S}^3 = \left\{ a \in \mathbb{H} : |a| = 1 \right\}}$$

tal como $u = \exp(i\theta)$ é uma parametrização da esfera-1 (o circulo unitário) $\mathbb{S}^1$ tal que

$$\mathbb{S}^1 = \left\{ u \in \mathbb{C} : |u| = 1 \right\}.$$

Note-se que, sendo $a = a_0 + \mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ um quaternião unitário, se tem $|a|^2 = 1$ pelo que $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$, i.e., fixados três parâmetros (e.g., $a_1$, $a_2$ e $a_3$ que definem o «vector» $\mathbf{a}$) a quarta componente fica automaticamete determinada (e.g., tem-se $a_0^2 = 1 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$). Um quaternião arbitrário $q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}$, com $\varrho = |q| \geq 0$, escreve-se portanto na forma

$$q = \varrho\exp(\mathbf{a}) = \varrho\exp(\alpha\,\hat{\mathbf{a}}) = \varrho(\cos\alpha + \hat{\mathbf{a}}\sin\alpha) = q_0 + \mathbf{q}$$

$$\therefore \left| \begin{array}{l} q_0 = \varrho\cos\alpha = \Re(q) \\ \mathbf{q} = \hat{\mathbf{a}}\,\varrho\sin\alpha = \Im(q) \end{array} \right.$$

ou seja, em síntese, uma parametrização $(\varrho, \mathbf{a})$ da forma

$$\boxed{q = \varrho\exp(\alpha\,\hat{\mathbf{a}})}$$

define um quaternião $q \in \mathbb{H}$, tal como $z = \varrho\exp(i\theta)$ é a forma genérica de um complexo $z \in \mathbb{C}$.

Note-se que um vector euclidiano $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ é tal que $\mathbf{v}^2 = |\mathbf{v}|^2$. Um «vector» que seja a parte imaginária de um quaternião, i.e., $\mathbf{q} = \Im(q) \in \mathbb{R}^3$ com $q \in \mathbb{H}$ é, na realidade, anti--euclidiano pois $\mathbf{q}^2 = -|\mathbf{q}|^2$. Isto é uma consequência do isomorfismo $\mathbb{H} \simeq C\ell_3^+$ tendo-se, mais especificamente, $\Im(\mathbb{H}) \simeq \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$. Com efeito, o produto $\mathbf{i\,j\,k} = -1$ significa que, em rigor, deverá fazer-se, e.g., a correspondência $\mathbf{i} \simeq -\mathbf{e}_{23}$, $\mathbf{j} \simeq -\mathbf{e}_{31}$ e $\mathbf{k} \simeq -\mathbf{e}_{12}$, pelo que

$$\mathbf{i\,j\,k} \simeq -\mathbf{e}_{23}\mathbf{e}_{31}\mathbf{e}_{12} = -(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2^2\mathbf{e}_3^2 = -1 .$$

$$\boxed{\mathbb{H} \simeq C\ell_3^+} \quad \rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{cc} \underline{\mathbb{H}} & \underline{C\ell_3^+} \\ \mathbf{i} & -\mathbf{e}_{23} \\ \mathbf{j} & -\mathbf{e}_{31} \\ \mathbf{k} & -\mathbf{e}_{12} \end{array}}$$

A correspondência $\mathbf{i} \mapsto \mathbf{e}_1$, $\mathbf{j} \mapsto \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{e}_3$ é inconsistente, pois

$$\mathbf{i\,j\,k} \mapsto \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{123} \neq -1$$

é o trivector unitário de $C\ell_3$ tal que

$$(\mathbf{i\,j\,k})^2 \mapsto \mathbf{e}_{123}^2 = -1$$

e que entra em contradição com $(\mathbf{i\,j\,k})^2 = 1$.

Um papel fundamental desempenhado pelos quaterniões é como geradores de rotações – o que foi visto, pela primeira vez, por Hamilton (de acordo com o relato de Cayley, em 1845). Consideremos, com efeito, a aplicação

$$\boxed{\mathsf{R}_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = a\,\mathbf{r}\,a^{-1}, \quad a \in \mathbb{S}^3} .$$

Notemos, em primeiro lugar, que $|\mathsf{R}_a(\mathbf{r})| = |a|\,|\mathbf{r}|\,|a^{-1}| = |\mathbf{r}|$ pois $|a| = |a^{-1}| = 1$. De seguida, notemos que

$$\left|\begin{array}{l} a = \exp\left(\dfrac{\alpha}{2}\,\hat{\mathbf{a}}\right) \\ a^{-1} = \exp\left(-\dfrac{\alpha}{2}\,\hat{\mathbf{a}}\right) \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} \mathsf{R}_a(\mathbf{r}) = a\,\mathbf{r}\,a^{-1} = \exp\left(\dfrac{\alpha}{2}\,\hat{\mathbf{a}}\right)\mathbf{r}\,\exp\left(-\dfrac{\alpha}{2}\,\hat{\mathbf{a}}\right) \\ \qquad = \left[\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) + \hat{\mathbf{a}}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right]\mathbf{r}\left[\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) - \hat{\mathbf{a}}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right] \\ \qquad = \mathbf{r}\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) + \sin(\alpha)(\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{r}) - \hat{\mathbf{a}}\mathbf{r}\hat{\mathbf{a}}\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \end{array}\right.$$

e, como se tem

$$\left|\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}\mathbf{r}\hat{\mathbf{a}} &= (\hat{\mathbf{a}}\mathbf{r})\hat{\mathbf{a}} = -(\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r})\hat{\mathbf{a}} + (\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{r})\hat{\mathbf{a}} \\ &= -(\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r})\hat{\mathbf{a}} + \left[-(\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{r})\cdot\hat{\mathbf{a}} + (\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{r})\times\hat{\mathbf{a}}\right] \\ &= -(\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r})\hat{\mathbf{a}} + (\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{r})\times\hat{\mathbf{a}} = -(\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r})\hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{a}}\times(\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{r}) \\ &= -(\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r})\hat{\mathbf{a}} - \left[(\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r})\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{r}\right] \end{aligned}\right. \quad \rightarrow \quad \boxed{\hat{\mathbf{a}}\mathbf{r}\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{r} - 2(\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r})\hat{\mathbf{a}}}$$

infere-se, por fim, que

$$\boxed{\mathsf{R}_a(\mathbf{r}) = a\,\mathbf{r}\,a^{-1} = \cos\alpha\,\mathbf{r} + \sin\alpha\,(\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{r}) + (1-\cos\alpha)(\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r})\hat{\mathbf{a}}}$$

pelo que se tem, com efeito, $\mathsf{R}_a(\mathbf{r}) = a\,\mathbf{r}\,a^{-1} \in \mathbb{R}^3$. A operação correspondente a $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathsf{R}_a(\mathbf{r})$ é, assim, uma rotação. Note-se que se pode definir $\left(\hat{\mathbf{a}}^2 = -1\right)$

$$\mathbf{r} = -\mathbf{r}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}} = -(\mathbf{r}\hat{\mathbf{a}})\hat{\mathbf{a}} = (\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r})\hat{\mathbf{a}} - (\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{a}})\hat{\mathbf{a}} = \underbrace{(\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r})\hat{\mathbf{a}}}_{\mathbf{r}_{\parallel}} + \underbrace{(\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{r})\times\hat{\mathbf{a}}}_{\mathbf{r}_{\perp}}.$$

tendo-se

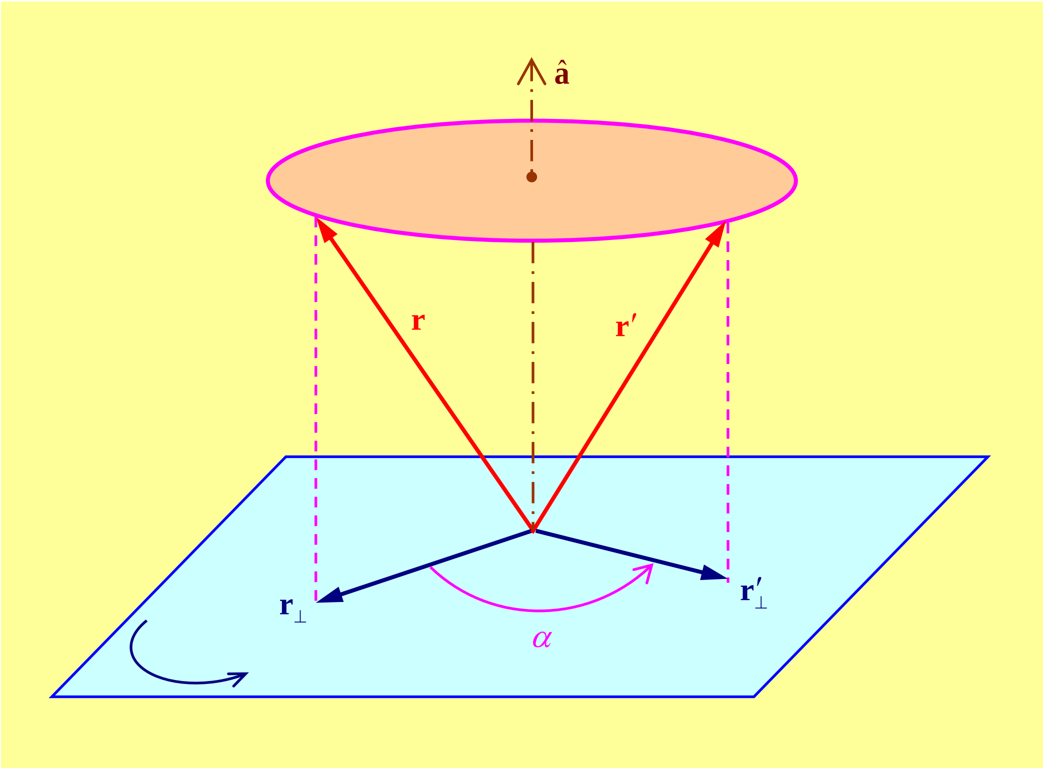
$$\mathbf{r}_{\perp} = (\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{r})\times\hat{\mathbf{a}} = -\hat{\mathbf{a}}\times(\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{r}) = \mathbf{r} - (\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r})\hat{\mathbf{a}}.$$

Assim, vem ainda

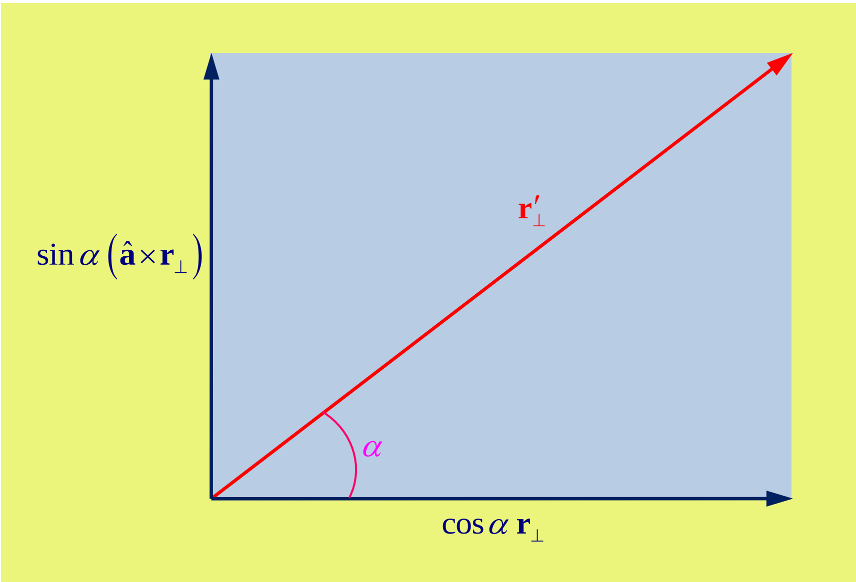
$$\boxed{\mathbf{r}' = \mathsf{R}_a(\mathbf{r}) = \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp} \quad \rightarrow \quad \left|\begin{aligned} \mathbf{r}'_{\parallel} &= \mathbf{r}_{\parallel} = (\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r})\hat{\mathbf{a}} \\ \mathbf{r}'_{\perp} &= \cos\alpha\,\mathbf{r}_{\perp} + \sin\alpha\,(\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{r}_{\perp}) \end{aligned}\right.}$$

$$\therefore \quad |\mathbf{r}'_{\perp}| = |\mathbf{r}_{\perp}|$$

uma vez que $\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{r} = \hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{r}_{\perp}$, tendo-se $\mathbf{r}_{\perp} \perp (\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{r}_{\perp})$. O plano onde se dá a rotação, de um ângulo $\alpha$, é o plano definido pelos vectores $(\mathbf{r}_{\perp}, \hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{r}_{\perp})$ em que $|\mathbf{r}_{\perp}| = |\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{r}_{\perp}|$. O eixo desta rotação é o vector unitário $\hat{\mathbf{a}}$ e o sentido da rotação é o directo (i.e., contrário ao sentido do movimento dos ponteiros de um relógio) quando observado perpendicularmente a $\hat{\mathbf{a}}$ com este último vector apontando para o observador – tal como se indica na figura anexa (da página seguinte). Uma rotação em $\mathbb{R}^3$ é portanto descrita por 3 parâmetros correspondentes a um quaternião unitário: um dos parâmetros é o ângulo de rotação $\alpha$; os dois restantes parâmetros $(\theta, \phi)$ caracterizam o vector unitário $\hat{\mathbf{a}} = \cos\theta\,\mathbf{k} + \sin\theta\,(\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j})$.




No plano da rotação, plano $\hat{\mathbf{a}}^{\perp}$ perpendicular ao vector $\hat{\mathbf{a}}$, tem-se então a situação descrita na figura anexa.




Suponhamos agora que se consideram duas rotações sucessivas: uma primeira rotação de um ângulo $\alpha=|\mathbf{a}|$ em torno de um eixo $\hat{\mathbf{a}}$ e uma segunda rotação de um ângulo $\beta=|\mathbf{b}|$ em torno de um eixo $\hat{\mathbf{b}}$. Facilmente se verifica, neste caso, que a composição destas duas rotações consecutivas é equivalente a uma única rotação de um ângulo $\gamma = |\mathbf{c}|$ em torno de um eixo $\hat{\mathbf{c}}$. Com efeito, tem-se

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathsf{R}_a(\mathbf{r}) = a\,\mathbf{r}\,a^{-1} \\ \mathbf{r}' \mapsto \mathbf{r}'' = \mathsf{R}_b(\mathbf{r}') = b\,\mathbf{r}'\,b^{-1} \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}'' = \mathsf{R}_c(\mathbf{r}) = c\,\mathbf{r}\,c^{-1} = (b\,a)\,\mathbf{r}\,(b\,a)^{-1}$$

em que, com $(b\,a)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$,

$$a = \exp\left(\frac{\alpha}{2}\,\hat{\mathbf{a}}\right), \quad b = \exp\left(\frac{\beta}{2}\,\hat{\mathbf{b}}\right), \quad c = \exp\left(\frac{\gamma}{2}\,\hat{\mathbf{c}}\right)$$

de modo que (com $\mathbf{a} = \alpha\,\hat{\mathbf{a}}$, $\mathbf{b} = \beta\,\hat{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{c} = \gamma\,\hat{\mathbf{c}}$)

$$c = b\,a \quad \rightarrow \quad \exp\left(\frac{\mathbf{c}}{2}\right) = \exp\left(\frac{\mathbf{b}}{2}\right)\exp\left(\frac{\mathbf{a}}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\mathbf{c}}{\gamma}\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \left[\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \frac{\mathbf{b}}{\beta}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\mathbf{a}}{\alpha}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\mathbf{c}}{\gamma}\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = {} & \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\mathbf{a}}{\alpha}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ & + \frac{\mathbf{b}}{\beta}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\mathbf{b}\,\mathbf{a}}{\alpha\beta}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

pelo que, dividindo pelas respectivas partes reais, se infere que

$$1 + \frac{\mathbf{c}}{\gamma}\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 1 + \frac{\frac{\mathbf{a}}{\alpha}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\mathbf{b}}{\beta}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\alpha\beta}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\alpha\beta}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{\mathbf{c}}{\gamma}\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 1 + \frac{\frac{\mathbf{a}}{\alpha}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\mathbf{b}}{\beta}\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) - \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\alpha\beta}\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\alpha\beta}\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

pois

$$\mathbf{b}\,\mathbf{a} = -\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

Assim, obtém-se a fórmula de Olinde Rodrigues

$$\boxed{\mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a}' + \mathbf{b}' - \mathbf{a}'\times\mathbf{b}'}{1 - \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'}}$$

onde se fez

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{a}}{\alpha}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{b}}{\beta}\tan\left(\frac{\beta}{2}\right), \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{c}}{\gamma}\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Refira-se, ainda, que os quaterniões também podem ser considerados como geradores de rotações em $\mathbb{R}^4$ (o que foi visto, pela primeira vez, por Cayley em 1855)

$$\boxed{\mathsf{R}:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : q \mapsto q' = a\,q\,b^{-1}, \quad a,b \in \mathbb{S}^3}$$

fazendo a identificação $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$, i.e., com $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ na base $\mathcal{B}(\mathbb{R}^4) = \{1, i, j, k\}$. Note-se que, enquanto uma rotação em $\mathbb{R}^3$ é descrita por 3 parâmetros (já que corresponde a um quaternião unitário), uma rotação em $\mathbb{R}^4$ é descrita por 6 parâmetros (já que corresponde a um par de quaterniões unitários)

$$\left|\begin{aligned} a &= a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = \frac{p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}}{\sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} \in \mathbb{S}^3 \\ b &= b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} = \frac{q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \in \mathbb{S}^3 \\ b^{-1} &= \bar{b} = b_0 - b_1\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_3\mathbf{k} = \frac{q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \in \mathbb{S}^3 \end{aligned}\right.$$

com $p_\alpha, q_\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$. Com efeito, tem-se $|q'| = |\mathsf{R}(q)| = |q|$ pois $|a| = |b^{-1}| = 1$.

Uma álgebra $\mathcal{A}$ sobre o corpo $\mathbb{R}$ é, por definição, um espaço linear (i.e., vectorial) $\mathcal{A}$ definido sobre o corpo $\mathbb{R}$ onde existe uma aplicação bilinear $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} : (a, b) \mapsto ab$ (que se designa por produto da álgebra). Bilinearidade significa que a aplicação é linear em ambos os argumentos:

$$\left|\begin{array}{l} \forall\, a, b, c \in \mathcal{A} \\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right. \quad \to \quad \left|\begin{array}{l} (a+b)c = ac + ab \\ a(b+c) = ab + ac \\ (\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab) \end{array}\right. .$$

A álgebra dos quaterniões é uma álgebra de divisão. Com efeito, uma álgebra de dimensão finita diz-se uma álgebra de divisão quando não tiver divisores de zero, i.e, quando

$$ab = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0 .$$

Note-se que as álgebras de Clifford não são, em geral, álgebras de divisão: por exemplo, em $C\ell_2$ tem-se

$$\left|\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_1) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \subset C\ell_2 \\ \bar{p} &= \frac{1}{2}(1 - \mathbf{e}_1) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \subset C\ell_2 \end{aligned}\right. \quad \to \quad \boxed{p\,\bar{p} = \bar{p}\,p = 0}$$

em que $\bar{p}$ é o multivector conjugado de Clifford do multivector $p$ e onde $p$ e $\bar{p}$ são idempotentes pois $p^2 = p$ e $\bar{p}^2 = \bar{p}$.

Diz-se que uma álgebra $\mathcal{A}$ com um forma quadrática definida-positiva $N : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ preserva a norma quando

$$N(ab) = N(a)N(b), \quad \forall\, a, b \in \mathcal{A}.$$

Demonstra-se o seguinte: uma álgebra $\mathbb{D}$ de divisão definida sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos reais que preserva a norma é tal que $\dim(\mathbb{D}) = 1$, $\dim(\mathbb{D}) = 2$, $\dim(\mathbb{D}) = 4$ ou $\dim(\mathbb{D}) = 8$; se, além disso, a álgebra tiver unidade 1, então $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{D} = \mathbb{C}$, $\mathbb{D} = \mathbb{H}$ ou $\mathbb{D} = \mathbb{O}$ (representa-se por $\mathbb{O}$ a álgebra dos octoniões). Note-se que, destas quatro álgebras de divisão, apenas a álgebra dos octoniões não é associativa. As álgebras $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são abelianas (ou comutativas) mas as álgebras $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$ não são abelianas. Dado que a álgebra dos quaterniões é uma álgebra de divisão que preserva a norma e é associativa, é isomorfa a uma álgebra matricial: com efeito, tem-se o isomorfismo

$$\mathbb{H} \simeq \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$$

em que $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ é a álgebra das matrizes $2 \times 2$ com entradas complexas. Com efeito, pode estabelecer-se a seguinte correspondência

$$1 \simeq E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} \simeq i\,\sigma_1 = I = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} \simeq i\,\sigma_2 = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} \simeq i\,\sigma_3 = K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

onde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ são as conhecidas matrizes de Pauli da mecânica quântica, i.e.,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Usando este isomorfismo fica demonstrada, também, a própria associatividade da álgebra dos quaterniões. Em geral um quaternião $q = w + \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z \in \mathbb{H}$ é, portanto, isomorfo à matriz complexa

$$q = w + \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z \in \mathbb{H} \simeq Q = \begin{pmatrix} w + i\,z & i\,x + y \\ i\,x - y & w - i\,z \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}).$$

Note-se que

$$\left| \begin{array}{l} u = w + i\,z \in \mathbb{C} \\ v = -i\,x - y \in \mathbb{C} \end{array} \right. \quad \to \quad Q = \begin{pmatrix} w + i\,z & i\,x + y \\ i\,x - y & w - i\,z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$$

tendo-se ainda (pelo teorema de Cayley-Hamilton)

$$\boxed{Q^2 - [\mathrm{tr}(Q)]\,Q + [\det(Q)]\,E = 0}$$

onde

$$\operatorname{tr}(Q) = u + \bar{u} = 2\Re(u), \quad \det(Q) = |u|^2 + |v|^2 .$$

Esta equação matricial corresponde à equação quadrática de coeficientes reais

$$\boxed{q^2 - 2\,\Re(q)\,q + |q|^2 = 0}$$

já anteriormente estabelecida. A demonstração de que a álgebra dos quaterniões é uma álgebra de divisão, é fácil: usando o isomorfismo com $\operatorname{Mat}(2,\mathbb{C})$, suponhamos então que se tem $AB = 0$ com $A, B \in \operatorname{Mat}(2,\mathbb{C})$; então, $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$ pelo que $\det(A) = 0$ ou $\det(B) = 0$. Porém,

$$\det(Q) = |u|^2 + |v|^2 = 0$$

apenas quando $u = v = 0$. Infere-se, deste modo, que

$$a\,b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0$$

Q.E.D.

---

## Referências utilizadas


- Pertti Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge: Cambridge University Press, 2nd ed., 2001 (pp. 67-79, pp. 301-302).
- H.-D. Ebbinghaus *et al.*, *Numbers*. New York: Springer-Verlag, 1991 (pp. 189-220).


## Bibliografia


- S. L. Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups*. Mineola, NY: Dover, 2005 (1986).
- J. B. Kuipers, *Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1999.
- J. Hanson, *Visualizing Quaternions*. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann Publishers, 2006.
- J. H. Conway and D. A. Smith, *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry*. Wellesley, MA: A K Peters, 2003.
- M. J. Crowe, *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*. New York: Dover, 1994 (1967).